

Der Schatten – Ein einfaches Phänomen?

*Man meint, in ein paar Zeilen alles darüber
sagen zu können, aber wenn man ihn aufmerksam
studiert und mitten in sein dunkles Herz späht,
erweist er sich als unendlich komplex.*

—Roberto Casati—

Der Schatten gehört nicht unbedingt zu den Phänomenen, die unser Verständnis herausfordern und für die meisten Menschen lässt er sich mit wenigen Worten erklären: Der Schatten ist die Abwesenheit von Licht. So wie ein Regenschirm den Regen abhält, hinterlässt ein beleuchtetes Objekt nach dieser Vorstellung auf einer Wand einen dunklen Abdruck von sich selbst – ein 'Loch im Licht'. Obwohl Schatten strukturärmer und einfacher erscheinen mögen, ahmen sie im Wesentlichen doch nur die Form des Objekts nach (Abb. 1). Die weiteren Details werden durch die Geometrie der Strahlensätze geregelt. Schon Kinder erwarten, dass ein Schatten ein genaues Abbild des Objekts darstellt, oder dass Schatten schwarz erscheinen [Wo06]. Doch ein einfaches Experiment kann Verwirrung stiften.

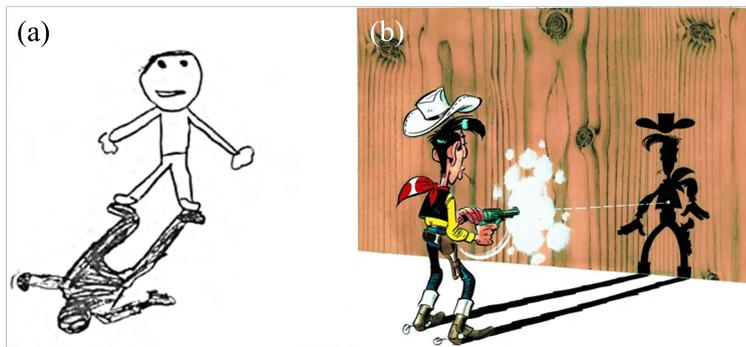


Abb. 1: (a) Kinderzeichnung zum Schatten (entn. aus [Wo06], S. 14). (b) Unsere Vorstellungen zum Schatten sind auch durch mediale Darstellungen geprägt.

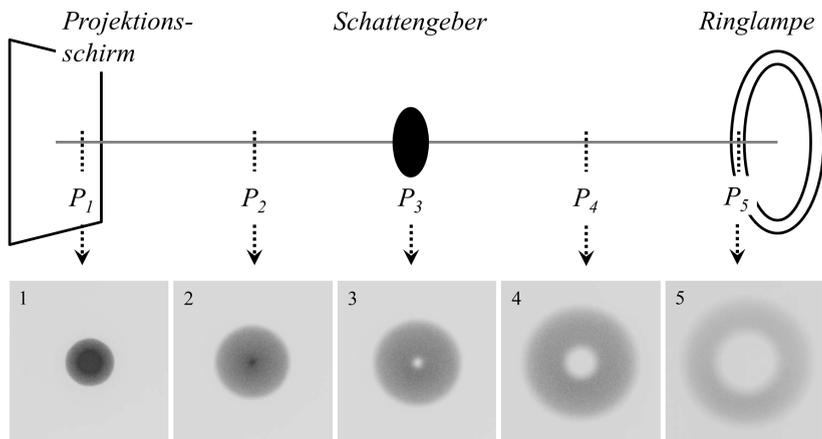


Abb. 2: Bewegt man den kreisförmigen Schattengeber vom Schirm (P_1) in Richtung der Ringlampe (P_5), wird der Schatten zu einem Ring – ein Schatten der Lampe (entn. aus [GQ23].)

1 Der Schatten einer Lampe

Vor einer ringförmigen Lampe befindet sich eine kreisförmige Pappscheibe, die einen Schatten auf die Wand wirft. Bewegt man den Schattengeber von der Wand in Richtung der Lichtquelle, beobachtet man eine bemerkenswerte Veränderung des Schattenbilds (Abb. 2). Hält man die Pappscheibe direkt vor die Wand, erscheint der Schatten als dunkle Scheibe, wie es der üblichen Vorstellung von Schatten entspricht. Bewegt man die Scheibe jedoch auf die Lampe zu, entsteht in der Mitte des Schattens ein heller Fleck, und das Schattenbild nimmt die Form eines Rings an [GQ23]. Für viele, die dieses Phänomen zum ersten Mal sehen, ist es überraschend, denn es stellt eine Herausforderung für unser konzeptuelles Verständnis der Schattenentstehung dar. Der Schatten hat sich während der Bewegung des Schattengebers in das dunkle Abbild der Lampe verwandelt. Anders ausgedrückt: Der Schatten ist nun der Schatten der *Lampe*.

Es mag zunächst seltsam erscheinen, aber der ringförmige Schatten ist nur ein Extremfall, in dem das Schattenbild die Form der Lampe fast vollständig angenommen hat. Generell spielt die Geometrie der Lichtquelle bei der Schattenentstehung eine viel größere Rolle, als allgemein angenommen wird. Oft hört man, dass Schatten unscharf erscheinen, weil die Lichtquelle ausgedehnt ist. Das ist nicht falsch; allerdings wird dabei unterschätzt, dass man in nahezu jedem Schattenbild einen charakteristischen Einfluss der Lichtquellengeometrie

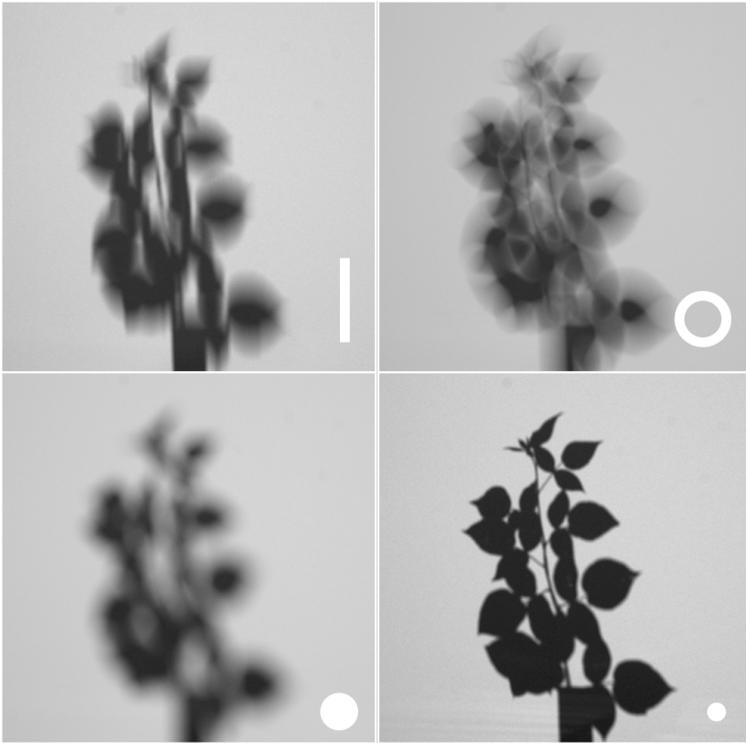


Abb. 3: Schattenbild eines Himbeerstrauchs, der mit verschieden geformten Lichtquellen beleuchtet wird. Die jeweilige Lampenform ist in der unteren linken Ecke angezeigt.

beobachten kann. In der Regel enthalten Schattenbilder Informationen sowohl über die Form des Schattengebers als auch über die Form der Lichtquelle. In Abbildung 3 sind Schattenbilder eines Strauchs zu sehen, der mit verschiedenen Formen von Lichtquellen beleuchtet wurde. Dabei blieben die Abstände zwischen Lichtquelle, Strauch und Schirm konstant, lediglich die Form der Lichtquelle wurde ausgetauscht (unten rechts in jedem Bild dargestellt). Das Schattenbild verweist nicht nur auf den Strauch als Hindernis, sondern auch auf die spezifische Form der Lichtquelle, die ihm ein charakteristisches Erscheinungsbild verleiht. Es scheint, als sei die Kontur des Strauchschattens mit einem Stift nachgezeichnet worden, dessen Form und Ausrichtung der der Lichtquelle entspricht [Gr10]. Der Einfluss der Lichtquellenform ist dabei umso geringer, je kleiner deren geometrische Ausdehnung ist. Bei Punktlichtquellen verschwindet dieser Einfluss im Prinzip vollständig.

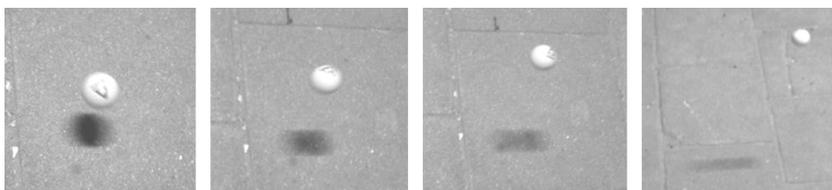


Abb. 4: Schatten eines springenden Tischtennisballs, der von oben von einem Stablicht beleuchtet wird (entn. aus [GQ23]).

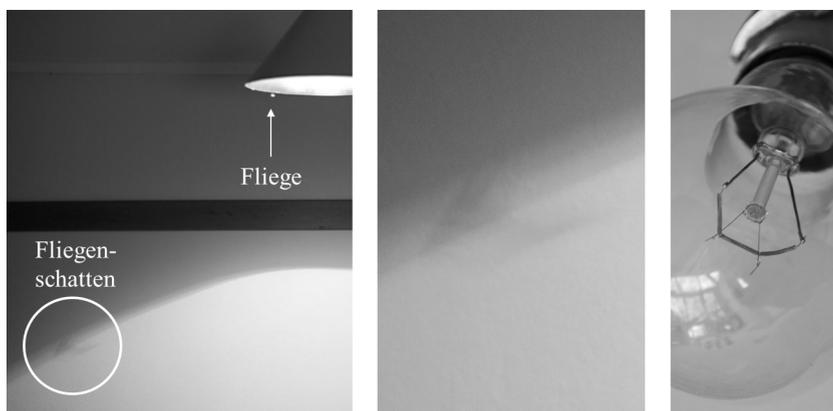


Abb. 5: Schatten einer Fliege während ihrer Reise auf einem Lampenschirm. Er ähnelt nicht der Fliege, sondern zeigt das dunkle Abbild des leuchtenden Glühfadens (entn. aus [GQ23]).

Einmal darauf aufmerksam geworden, können wir versuchen, im Erscheinungsbild von Schattenbildern sowohl die Form des Schattengebers als auch die Form der Lichtquelle herauszulesen [Gr07]. Abbildung 4 zeigt einen aufprallenden Tischtennisball, der von oben durch ein Stablicht beleuchtet wird. Immer wenn sich der Abstand des Balls zum Boden vergrößert, erstreckt sich sein Schatten in eine Richtung, die durch die Ausrichtung des Stablichts bestimmt wird: Der Schatten wird zum dunklen Abbild des Stablichts [Gr11]. In Abbildung 5 wandert eine Fliege am Rand eines Lampenschirms entlang und erzeugt einen Schatten an der Wand. Das Schattenbild erinnert kaum noch an eine Fliege, nimmt aber deutlich die Form des Glühfadens an, das dunkle Abbild des Glühfadens der Glühbirne [Gr11].

Etwas subtiler ist der Einfluss der Leuchtgeometrie an Schattenrändern. Aber wer weiß, worauf zu achten ist, wird fündig. Zum Beispiel erscheinen Schatten immer schärfer, kontrastreicher und dunkler an Stellen, an denen der



Abb. 6: Links und Mitte: Mit zunehmenden Abstand zum Boden werden die Schatten 'unschärfer', da sich die Form der Lichtquelle, hier die Sonne, immer stärker dem Schattenbild einprägt. Rechts: Fensterstreben, die weiter von der Wand entfernt sind, zeigen einen ähnlichen Effekt.

Stamm eines Baumes oder eine Straßenlaterne den Boden berührt, im Vergleich zu den Schattenbereichen weiter oben (Abb. 6). Mit zunehmendem Abstand vom Hindernis werden Schatten weicher und heller; das heißt, die Geometrie der kreisförmigen Sonne hat einen stärkeren Einfluss.

Die Beispiele illustrieren die faszinierende Vielfalt von Schattenbildern. Was können wir daraus lernen? Die wichtigste Erkenntnis ist, dass die verbreitete Vorstellung vom Schatten als bloßem Abbild des Schattenwerfers ein Irrtum ist. Diese Vorstellung trifft nur in sehr speziellen Fällen zu, nämlich dann, wenn die Form der Lichtquelle im Schattenbild vollständig unterdrückt wird (Punktlichtquelle) oder der Schattenwerfer direkt vor den Schirm gehalten wird. Grundsätzlich aber gehen sowohl die Form der Lichtquelle als auch die Form des Schattenwerfers in das Aussehen von Schattenbildern ein. Beide sind gleichermaßen an der Abbildung und am Abgebildetwerden beteiligt. Scheinbar komplexe Schatten entstehen daher oft durch das Zusammenspiel ungewöhnlicher Formen von Lichtquelle und Schattenwerfer.

Auf den ersten Blick scheint es von den relativen Abständen zwischen Lichtquelle, Schattengeber und Projektionsschirm abzuhängen, welche der Formen im Schattenbild dominanter ist. Eine genauere Untersuchung wird jedoch zeigen, dass es auf das Verhältnis der gesehenen Größen von Lichtquelle und Schattengeber ankommt – betrachtet vom Projektionsschirm aus.



Abb. 7: Links: Die Sonnenfinsternis am 8. Juli 1842. Rechts: Das Schattenbild, das auf der Erde entsteht, wenn sich der Mond als Schattengeber vor die Sonne als Lichtquelle schiebt.

2 Im Schattenbild unterwegs

Am 8. Juli 1842 ereignet sich über Wien eine Sonnenfinsternis, die der Nachwelt deshalb in Erinnerung geblieben ist, weil sie durch die Schilderung von Adalbert Stifter eine besonders schöne literarische Form erhalten hat (Abb. 7a):

Seltsam war es, daß dies unheimliche, klumpenhafte, tiefschwarze vorrückende Ding, das langsam die Sonne wegfraß, unser Mond sein sollte, der schöne, sanfte Mond, der sonst die Nächte so florig silbern beglänzte; aber doch war er es, und im Sternenrohr erschienen auch seine Ränder mit Zacken und Wulsten besetzt, den furchtbaren Bergen, die sich auf dem uns so freundlich lächelnden Runde türmen.

Endlich wurden auch auf Erden die Wirkungen sichtbar, und immer mehr, je schmaler die am Himmel glühende Sichel wurde; der Fluß schimmerte nicht mehr, sondern war ein taftgraues Band, matte Schatten lagen umher, die Schwalben wurden unruhig, der schöne, sanfte Glanz des Himmels erlosch, als liefe er von einem Hauche matt an, ein kühles Lüftchen hob sich und stieß gegen uns, über den Auen starrte ein unbeschreiblich seltsames, aber bleischweres Licht, über den Wäldern war mit dem Lichterspiele die Beweglichkeit verschwunden, und Ruhe lag auf ihnen, aber nicht die des Schlummers, sondern die der Ohnmacht – und immer fahler goß sich über die Landschaft, und diese wurde immer starrer – die Schatten unserer Gestalten legten sich leer und inhaltslos gegen das Gemäuer, die Gesichter wurden aschgrau – erschütternd war dieses allmähliche Sterben mitten in der noch vor wenigen Minuten herrschenden Frische des Morgens.

Gewiss gilt die Sonnenfinsternis den wenigsten Menschen heute noch als Himmelszeichen oder gar als Warnung übernatürlicher Mächte; dennoch zählt sie nach wie vor zu den spektakulärsten Erscheinungen in der Natur. Mit dem ersten Kontakt der beiden Himmelscheiben beginnt die Sonnenfinsternis, schreitet fort, je mehr von der Sonne durch den Mond verdeckt wird. Mit abnehmender Sichtbarkeit der Sonne verdunkelt sich die Umgebung, bis die Sonne schließlich in der Totalität vollständig hinter dem Mond verschwindet. Aber inwiefern hängt diese bekannte Perspektive auf eine Sonnenfinsternis mit den Schatten zusammen, die wir bisher auf einem Projektionsschirm betrachtet haben? In früheren Beobachtungen befanden wir uns stets außerhalb des Schattens. Wir standen neben dem Schirm, dem Schattengeber und der Lichtquelle und konnten beispielsweise die Größe und Form des Schattenbildes beschreiben oder seine Hell- und Dunkelabstufungen erkennen.

All das können wir bei einer Sonnenfinsternis nicht, weil wir uns mitten im Schatten befinden (Abb. 7a). Auf dem gigantischen Schirm der Erde stehend, beobachten wir das Zusammenwirken von Lichtquelle (der Sonne) und Schattengeber (der Mond) vom Boden aus, ohne gleichzeitig den Schatten als Ganzes zu überblicken (Abb. 7b). Die Sonnenfinsternis bietet deshalb einen günstigen Ausgangspunkt für unsere Überlegungen, weil sie uns wie kein anderes Naturschauspiel eine neue und ungewöhnliche Perspektive auf Schatten vermittelt. Die Helligkeit an einer Stelle im Schattenbild ergibt sich daraus, wie viel von der Lichtquelle sichtbar ist. Anders ausgedrückt: Die Beleuchtungsstärke hängt davon ab, wie viel der Schattengeber bereits von der Lichtquelle verdeckt hat.

Der Kernschatten des Mondes, der während einer totalen Sonnenfinsternis auf die Erde fällt, erstreckt sich über einige hundert Kilometer Breite. Im Gegensatz dazu misst sein Teilschatten, der aufgrund der Ausdehnung der Sonne entsteht, mehrere tausend Kilometer (Abb. 8). In den verschiedenen Bereichen des Mondschattens erleben Beobachter unterschiedliche Phasen der Sonnenfinsternis, abhängig davon, ob sie sich im Teil- oder Kernschattengebiet befinden [Mö06]. Beobachter im Kernschatten sehen die Sonne vollständig durch den Mond verdeckt, und die Totalität der Finsternis ist erreicht (Abb. 8, P_5). An diesen Orten ist von der Sonnenscheibe nichts zu sehen. Die Helligkeit sinkt auf ein Minimum, und das Gefühl einer nächtlichen Dunkelheit ist am stärksten ausgeprägt. Im Gegensatz dazu sehen Beobachter außerhalb des kompletten Schattens die Sonne vollständig, da die Finsternis entweder noch nicht begonnen hat oder an diesem Ort überhaupt nicht auftritt (Abb. 8, P_1). Das Übergangsbereich, also der Teilschatten, zeigt einen graduellen Helligkeitsübergang (Abb. 8,

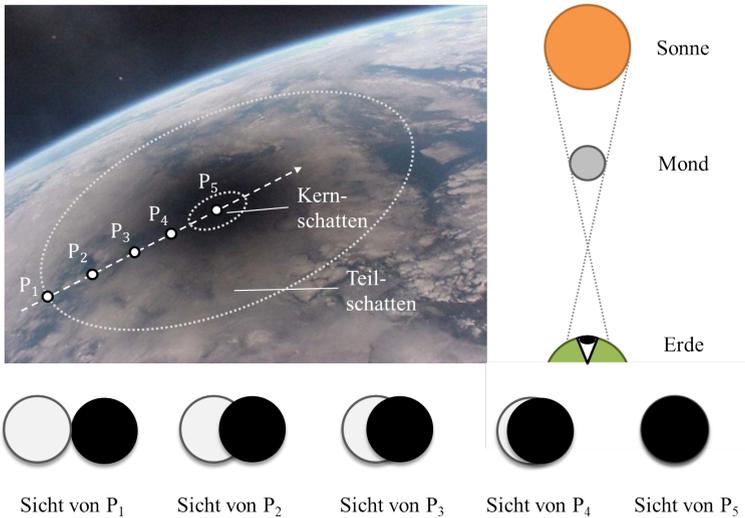


Abb. 8: Während einer Sonnenfinsternis zieht ein riesiger Schatten über die Erdoberfläche. In den verschiedenen Schattenzonen auf der Erde erlebt man unterschiedliche Phasen der Sonnenfinsternis. In den Teilschattenbereichen wird die Sonne teilweise vom Mond verdeckt ($P_2 - P_4$). Im Kernschattenbereich verdeckt der Mond die Sonne vollständig (P_5). Je weniger von der Sonne sichtbar ist, desto dunkler wird es an der entsprechenden Stelle auf der Erde.

$P_2 - P_5$). An allen Orten im Teilschattengebiet wird die Sonne teilweise durch den Mond verdeckt. Mit fortschreitender Verdeckung der Sonnenscheibe durch die Mondscheibe nimmt die sichtbare Flächenhelligkeit ab, und gleichzeitig erscheint der Schatten auf der Erde an dieser Stelle dunkler. Der Rückgang der gesehenen Helligkeit geht mit einer Verdunkelung im Schatten einher.

Fassen wir zusammen: Einerseits haben wir die Perspektive des Mondschattens, die im Grunde die 'gewohnte' Sicht auf den Schatten darstellt. Dabei wirft die Sonne als Lichtquelle zusammen mit dem Mond als Schattengeber ein Schattenbild auf die Erde. Andererseits gibt es die Perspektive der Sonnenfinsternis, bei der die Sonne als Lichtquelle durch den Mond als Schattengeber entweder vollständig oder teilweise verdeckt wird. Beide Sichtweisen auf den Schatten sind eng miteinander verbunden und ineinander überführbar. Die eine ermöglicht eine äußere, globale Betrachtung, die andere eine innere, lokale. Zur Unterscheidung werden wir sie als *abgelöste* und *eingebundene* Perspektive bezeichnen. Der Clou: Diese Idee lässt sich verallgemeinern und ist auf alle Formen von Lichtquellen und Schattengebern anwendbar, einschließlich aller bisherigen Beispiele.

Die abgelöste Perspektive ermöglicht es uns, die Entstehung von Schatten von außen zu überblicken. Die Lichtquelle, der Schattengeber und der Schirm sind im Raum angeordnet, und das Schattenbild erscheint auf dem Schirm. Im Gegensatz dazu befinden wir uns in der eingebundenen Perspektive mitten im Schattenbild. Wenn wir in Richtung der Lichtquelle und des Schattengebers blicken, erhalten wir anhand ihrer gegenseitigen Verdeckung ein Maß für die Helligkeit, die an diesem Beobachterstandort zu erwarten ist. Abhängig davon, wie viel von der Lichtquelle sichtbar ist, variiert die Helligkeit an dieser Stelle. Oder um es prägnanter auszudrücken: „Hell ist es dort, wo man Helligkeit sieht.“ Damit versetzt uns die eingebundene Perspektive in die Lage, eine einfache, aber allgemeingültige Definition von Schatten zu geben:

Kernschatten ist dort, von wo aus geblickt, die Leuchte vollständig verdeckt ist. **Teilschatten** ist dort, von wo aus geblickt, die Leuchte teilweise verdeckt ist. Das **Schattenbild** ist die Summe aus Kernschatten- und Teilschattengebiet.

Wir machen dieses Konzept sofort verständlich. Zu Beginn haben wir das Schattenbild einer Ringleuchte erzeugt, indem wir einen kreisförmigen Schattengeber vor eine ringförmige Lampe gehalten haben. Können wir mithilfe der eingebundenen Perspektive verstehen, warum es zu einer Aufhellung in der Mitte des Schattens kommt? Gemäß dieser Idee müssen wir die Perspektive der 'Sonnenfinsternis' einnehmen und uns fragen, wie viel von der Lichtquelle durch den Schattengeber verdeckt wird, wenn man aus dem hellen Bereich in Richtung der Leuchte schaut. Diese Betrachtung ermöglicht es uns, die Ursache für die Aufhellung in der Mitte des Schattens zu erklären.

In Abbildung 9 ist durch das ringförmige Schattenbild (vgl. Abb. 2, Bild 5) ein Untersuchungsweg (gestrichelte Linie) eingezeichnet und für fünf markante Orte P_1 bis P_5 dargestellt, welche Sicht man von dort jeweils auf die Ringleuchte und den kreisförmigen Schattengeber hat. Während wir uns in P_1 noch außerhalb des Schattens befinden, berühren sich in Punkt P_2 die sichtbare Leuchte und der sichtbare Schattengeber: Das Teilschattengebiet beginnt. Wenn man sich von P_2 nach P_4 bewegt, wandert der perspektivisch kleinere Schattengeber über ein Ringsegment der Leuchte, und wir bewegen uns durch den Teilschatten. In P_5 ist die Ringleuchte wieder vollständig sichtbar: Dort ist es genauso hell wie in P_1 ! Einen Kernschattenbereich gibt es im Schattenbild nicht, da die Ringleuchte nirgends vollständig verdeckt wird.

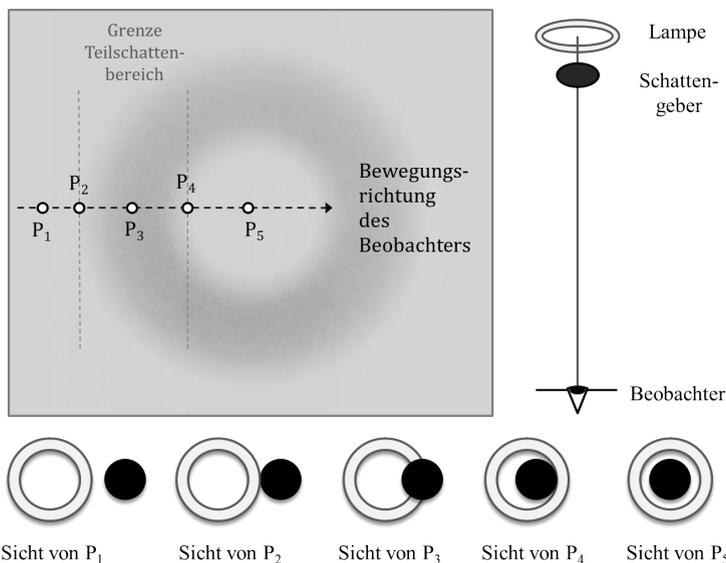


Abb. 9: P_1 : Leuchte unverdeckt \rightarrow kein Schatten, P_2 : Leuchte unverdeckt \rightarrow kein Schatten (Grenze Teilschattenzone), P_3 : Leuchte teilverdeckt \rightarrow Teilschatten, P_4 : Leuchte unverdeckt \rightarrow kein Schatten (Grenze Teilschattenzone), P_5 : Leuchte unverdeckt \rightarrow kein Schatten

Zum Vergleich wird in Abbildung 10 das Schattenbild analysiert, bei dem sich der kreisförmige Schattengeber sehr nah am Schirm befindet (vgl. Abb. 2, Bild 1). Dadurch erscheint der Schattengeber einem eingebundenen Beobachter im Bereich des Schattens deutlich größer im Vergleich zur Ringleuchte, die ihre Position nicht verändert hat. In diesem Fall gibt es einen Kernschatten, da die Leuchte im Zentrum des Schattenbildes vollständig verdeckt wird. Eine Aufhellung wie in Abbildung 9 ist dagegen nicht möglich.

Im nächsten Abschnitt werden wir die bisherigen Überlegungen zur eingebundenen Perspektive stärker formalisieren und Bedingungen formulieren, die weitere Merkmale von Schattenbildern aufdecken. Auf allgemeinerer Ebene haben wir mit der konzeptuellen Unterscheidung zwischen eingebundener und abgelöster Perspektive jedoch ein wichtiges Erkenntniswerkzeug vorgestellt, das sich immer wieder als nützlich erweist. Viele optische Phänomene begegnen uns mehr oder weniger natürlich in der einen, anderen oder in beiden Perspektiven. In einen Spiegel schauen wir hinein, mit einem Beugungsgitter erzeugen wir ein Interferenzmuster auf einem Schirm, und eine Sammellinse ist Brennglas und Lupe zugleich. Die Anwendung der Perspektiven auf jeden

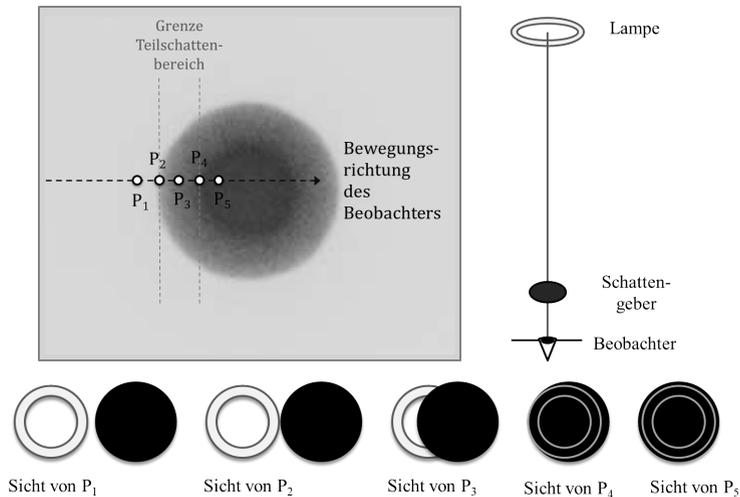


Abb. 10: P_1 : Leuchte unverdeckt \rightarrow kein Schatten, P_2 : Leuchte unverdeckt \rightarrow kein Schatten (Grenze Teilschattenzone), P_3 : Leuchte teilverdeckt \rightarrow Teilschatten, P_4 : Leuchte voll verdeckt \rightarrow kein Schatten (Grenze Teilschattenzone), P_5 : Leuchte voll verdeckt \rightarrow Kernschatten

spezifischen Phänomenbereich muss sich von Fall zu Fall zeigen. Wie bei den Schattenbildern sind jedoch beide Perspektiven, die eingebundene und die abgelöste, grundsätzlich möglich. Sobald wir die eine identifiziert haben, können wir nach der anderen Ausschau halten.

3 Eigenschaften von Schattenbildern

Wie wir festgestellt haben, wird die Helligkeit an einem bestimmten Punkt auf dem Projektionsschirm durch den Grad der gesehenen Verdeckung der *scheinbaren Größen* von Lichtquelle und Schattengeber beeinflusst. Diese Art der Beschreibung von Schattenbildern, basierend auf der inneren, lokalen Betrachtungsweise, haben wir als die eingebundene Perspektive bezeichnet. Für verschiedene Beobachtungsorte auf dem Schirm nimmt die gegenseitige Verdeckung zu oder ab, und somit ändert sich auch die Beleuchtungsstärke am Ort, gemessen durch den unverdeckten Anteil der Lichtquelle. Die scheinbare Größe von Leuchte und Schattengeber bleibt hingegen (nahezu) unverändert.

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, wie sich das gesamte Schattenbild verändert, wenn sich das gesehene Größenverhältnis zwischen Licht-

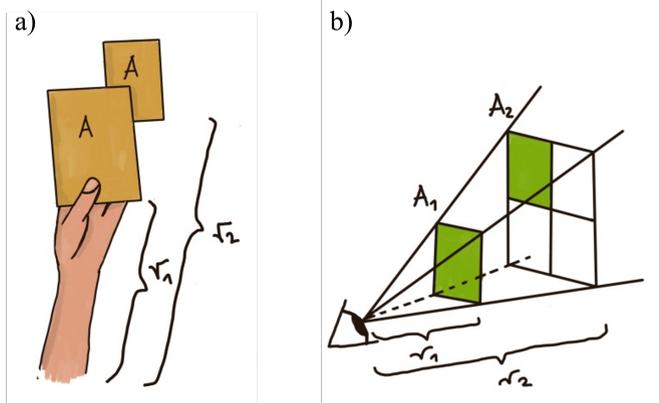


Abb. 11: a) Eine Fläche A erscheint umso kleiner, je weiter ich sie von mir entferne. b) Bei doppeltem Abstand ($r_2 = 2r_1$) muss die Fläche vervierfacht werden ($A_2 = 4A_1$), damit A_1 und A_2 den gleichen Raumwinkel einnehmen, d.h., die gleiche scheinbare Größe haben.

quelle und Schattengeber ändert. Wie wir bereits im vorherigen Abschnitt am Beispiel der Ringleuchte und des kreisförmigen Schattengebers gesehen haben, kann eine Veränderung der scheinbaren Größe des Schattengebers das resultierende Schattenbild beeinflussen.

Erinnern wir uns: In der ersten Situation (vgl. Abb. 9), als sich der Schattengeber nahe an der Leuchte befand, entstand ein Ringschatten, weil der Schattengeber im Verhältnis zur Ringleuchte kleiner erschien als die Lampe. In der zweiten Situation (vgl. Abb. 10) befand sich der Schattengeber viel näher am Schirm und erschien perspektivisch größer, weil er dem Beobachter näher war. Das Schattenbild nahm in diesem Fall eher die Form des Schattengebers an. Können wir voraussagen, wie sich das Schattenbild verändert, wenn sich die perspektivischen Ansichten, d.h. die scheinbaren Größen von Schattengeber und Leuchte, ändern?

Wie groß mir ein Objekt *erscheint*, hängt davon ab, *wie groß* seine 'wirklichen' Abmessungen sind und *wie weit* es von mir *entfernt* ist. Ein Blatt Papier, das sich im Gesichtsfeld eines Beobachters entfernt, scheint immer kleiner zu werden (siehe Abb. 11a). Sonne und Mond erscheinen aufgrund ihrer enormen Entfernungen zur Erde sehr klein im Vergleich zu ihren tatsächlichen Größen. Da die wahrgenommene Größe nicht gut mit einem Lineal gemessen werden kann, verwendet man zur Beschreibung der scheinbaren Größe den *Raumwinkel*, den ein gesehenes Objekt in Bezug auf einen Beobachter einnimmt.

Um den Begriff des Raumwinkels zu verstehen, betrachten wir zunächst Abbildung 11b. Stellen Sie sich vor, Sie halten eine Postkarte mit der Fläche A_1 in einem bestimmten Abstand r_1 vor Ihre Augen. Nun wollen wir herausfinden, wie groß ein Blatt Papier A_2 sein muss, damit es in doppelter Entfernung $r_2 = 2r_1$ genauso groß erscheint wie die Postkarte. Dies bedeutet, dass beide Flächen den gleichen Raumwinkel einnehmen und daher perspektivisch gleich groß erscheinen. Offensichtlich müssen die Seitenlängen des Papiers A_2 doppelt so lang sein wie die der Postkarte A_1 , um die gleiche scheinbare Größe zu erzielen. Dies führt dazu, dass die Fläche A_2 viermal so groß wie A_1 ist, also $A_2 = 4A_1$. Diese Vervierfachung der Fläche ist notwendig, um den Raumwinkel konstant zu halten, wenn der Beobachtungsabstand verdoppelt wird. Dies lässt sich mathematisch ausdrücken: Da $r_2 = 2r_1$, folgt daraus $r_2^2 = 4r_1^2$. Setzen wir die Gleichung für die Flächen $A_2 = 4A_1$ in Relation zu dieser Beziehung, ergibt sich durch das Dividieren beider Ausdrücke: $A_2/r_2^2 = A_1/r_1^2$.

Der Quotient A/r^2 ist die gleichbleibende Größe und wird als Raumwinkel, abgekürzt Ω bezeichnet. Der Raumwinkel ist eine Maßeinheit, die die Öffnung oder den Ausschnitt eines dreidimensionalen Bereichs im Raum misst. Er beschreibt, wie groß ein Objekt oder eine Lichtquelle aus einer bestimmten Entfernung erscheint. Zwei Flächen erscheinen für einen Beobachter gleich groß, wenn sie in Bezug auf das Auge den gleichen Raumwinkel einnehmen.

Der Raumwinkel Ω ist definiert als der Quotient aus der dem Beobachter zugewandten Fläche A und dem Quadrat des Abstands r . Der Raumwinkel wird in der Einheit Steradian (sr) gemessen. Es gilt:

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \quad (1)$$

Ausgestattet mit dem Konzept des Raumwinkels (siehe auch Beispiel 1) untersuchen wir nun einige der zu Beginn gestellten Fragen. Um die Raumwinkel der Lichtquelle und des Schattenwerfers voneinander zu unterscheiden, führen wir die Bezeichnungen Ω_L für den Raumwinkel der Lichtquelle und Ω_S für den Raumwinkel des Schattenwerfers ein. Welche geometrischen Faktoren beeinflussen das Erscheinungsbild des Schattens?

Abbildung 12 verdeutlicht die Ansichten einer L-förmigen Lichtquelle und eines quadratischen Schattengebers aus drei verschiedenen Positionen zwischen der Lichtquelle und der Projektionsfläche. Aus Sicht des Beobachters erscheint

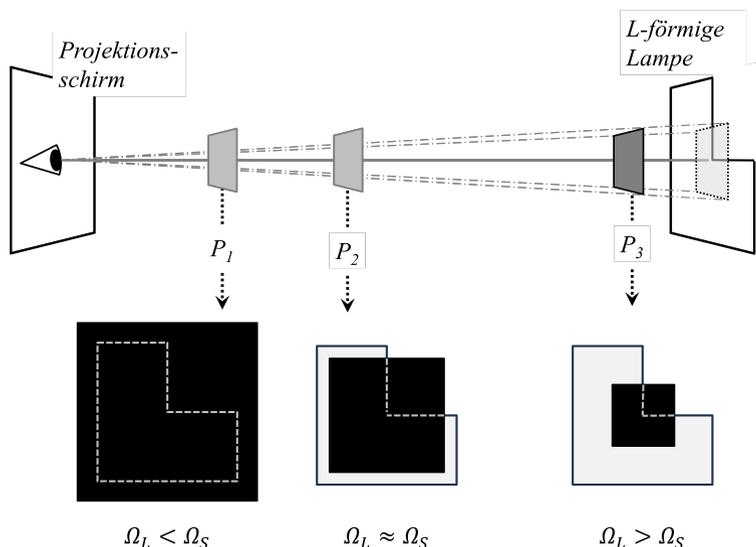


Abb. 12: Für die drei Positionen des Schattengebers ergeben sich drei verschiedene Fälle für das gesehene Größenverhältnis der Raumwinkel für Lichtquelle Ω_L und Schattengeber Ω_S . Befindet sich der Schattengeber nah am Schirm gilt $\Omega_L < \Omega_S$ (P_1). Befindet sich der Schattengeber nah an der Leuchte gilt $\Omega_L > \Omega_S$ (P_3). Dazwischen gibt es eine Position, so dass $\Omega_L \approx \Omega_S$ (P_2).

der Schattengeber umso kleiner, je weiter er sich von dem Schirm entfernt, während die Lichtquelle selbst stets gleich groß aussieht. In der Sprache der Raumwinkel ausgedrückt, variieren die Verhältnisse in den drei dargestellten Szenarien wie folgt: $\Omega_L > \Omega_S$, $\Omega_L \approx \Omega_S$ und $\Omega_L < \Omega_S$.

Wir rekonstruieren die *Kontur*, also die Umrandung des Schattenbildes, für den Fall, dass $\Omega_L > \Omega_S$ ist, wenn also die scheinbare Größe des Schattengebers kleiner ist als die der Leuchte. Welche Form nimmt das Schattenbild an? Abbildung 13a verdeutlicht das Vorgehen. Alle Orte auf dem Schirm, von denen aus der Schattengeber außerhalb der Leuchte sichtbar ist, sind maximal beleuchtet (P_1). Die Orte, an denen der Schattengeber vollständig innerhalb der Leuchte sichtbar ist, sind minimal beleuchtet, also am dunkelsten. Zwar verdeckt der Schattengeber in P_3 und P_4 unterschiedliche Bereiche der Lichtquelle, die sichtbare Gesamtfläche der Leuchte und damit die resultierende Beleuchtungsstärke sind in beiden Fällen jedoch gleich. Dazwischen gibt es Übergangsbereiche, deren Breite durch die scheinbare Größe des Schattengebers bestimmt werden und in diesem Fall sehr schmal ausfallen (P_2 und P_5).

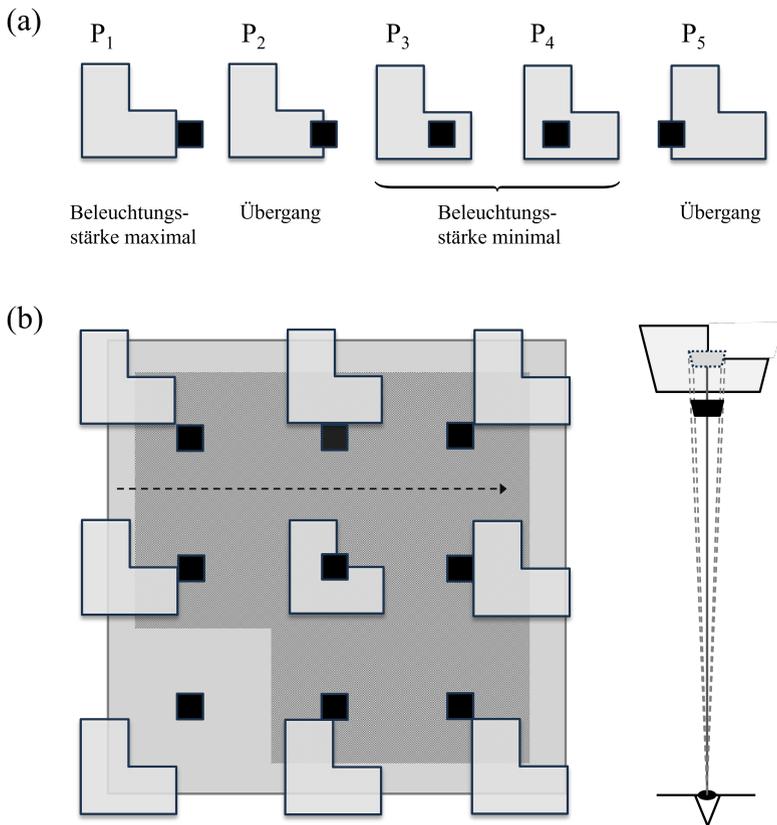


Abb. 13: a) Für den Fall $\Omega_L > \Omega_S$ sind verschiedene Grade der Verdeckung einer L-förmigen Lampe durch einen quadratischen Schattengeber dargestellt. Alle Orte auf dem Schirm, bei denen der Schattengeber vollständig innerhalb der Lichtquelle gesehen wird, erscheinen gleich dunkel (P_3 und P_4). Die Kontur des Schattenbildes entsteht dort, wo ein Übergang der Beleuchtungsstärke stattfindet (P_1 , P_2 und P_5). In diesem Fall werden die Übergangsbereiche durch die Geometrie der Lichtquelle bestimmt. b) Schematische Darstellung der Ansichten der L-förmigen Lichtquelle und des quadratischen Schattengebers für verschiedene Orte im L-förmigen Schattenbild.

Die Kontur des Schattenbildes wird durch die Bereiche der Übergangszonen bestimmt, denn nur dort ändert sich die Beleuchtungsstärke. Wie aus Abbildung 13b ersichtlich, wird die Kontur des Schattenbildes durch die Geometrie der Leuchte vorgegeben, während die Breite dieser Bereiche durch die scheinbare Größe, also den Raumwinkel des Schattengebers, festgelegt wird. Für den diskutierten Fall folgt, dass das Schattenbild stärker von der Geometrie der Leuchte

dominiert wird. Zwei weitere Eigenschaften des Schattenbildes werden vor diesem Hintergrund sofort deutlich. Zum einen sind die Schattenbilder in dieser Situation punktsymmetrisch gespiegelt. Zum anderen bildet der Teilschatten die Bildzone des Schattengebers, da seine Form nur hier wirksam ist.

Für den Fall $\Omega_L \approx \Omega_S$ nehmen beide, Lichtquelle und Schattengeber den gleichen Raumwinkel in Bezug auf den Beobachter ein. Eine Entscheidung, welche Geometrie im Schattenbild überwiegt, kann hier gar nicht getroffen werden: Es herrscht ein Mischungsgleichgewicht. Beide Formen tragen zu gleichen Teilen zum Aussehen des Schattenbildes bei. Nach Gleichung (1) ist diese Bedingung offenbar erfüllt, wenn $A_L/r_L^2 = A_S/r_S^2$ gilt (siehe Beispiel 2).

Schließlich kehren sich im Fall von $\Omega_S > \Omega_L$ die Bedingungen zur Erschließung des Schattenbildes gerade um. Nun bestimmt der Raumwinkel des Schattengebers die Geometrie des Schattens. Der Übergangsbereich wird Bildzone der Leuchte und das Schattenbild ist näherungsweise eine Projektion des Schattengebers. Wir überlassen es dem Leser oder der Leserin analoge Überlegungen wie in Abbildung 13 für diesen Fall anzustellen. Zusammenfassend ergibt sich:

$\Omega_L < \Omega_S$: Wenn Ω_S größer ist als Ω_L , überwiegt im Schattenbild die Geometrie des Schattengebers.

$\Omega_L \approx \Omega_S$: Das Schattenbild zeigt eine ausgewogene Mischung der Geometrien von Leuchte und Schattengeber.

$\Omega_L > \Omega_S$: Wenn Ω_S kleiner ist als Ω_L , überwiegt im Schattenbild die Geometrie der Leuchte.

4 Zusammenfassung

Schatten sind allgegenwärtig und können durchaus unser Schönheitsempfinden ansprechen. Sie sind zwar komplex, lassen sich aber mithilfe der eingebundenen Perspektive leicht durchschauen. Unser Ziel war es hier, einen Überblick über Schattenphänomene zu geben, die mit der eingebundenen Perspektive sogar schon Grundschulkindern zugänglich gemacht werden können. "Hell ist es dort, wo man Helligkeit sehen kann", klingt beinahe trivial, führt aber, systematisch angewandt, zu den grundlegenden Abbildungsprinzipien bei der Schattenbildung. Obwohl Schatten seit Langem ein fester Bestandteil des Optikunterrichts

sind, beschränkt man sich üblicherweise auf Spezialfälle. Meistens betrachtet man nur die Schatten, die durch Punktlichtquellen verursacht werden. Wie wir jedoch gezeigt haben, enthält das Schattenbild generell geometrische Informationen sowohl des Schattengebers als auch der Lichtquelle; das heißt, beide können gleichzeitig einen abbildenden Effekt haben. Als zentrale Größe zur Unterscheidung der möglichen Fälle haben sich dabei die Raumwinkel von Lichtquelle und Schattengeber erwiesen und deren Verhältnis zueinander.

In einem der nächsten Beiträge wollen wir darstellen, wie sich Schattenbilder weiter verallgemeinern und mathematisch modellieren lassen.

Literaturverzeichnis

- [GQ23] Grebe-Ellis, J.; Quick, T.: Soft shadow images. *European Journal of Physics* 44/4, 23pp, 2023.
- [Gr07] Grebe-Ellis, J.: Lesen im Buch der Natur, Zur Entwicklung einer phänomenologischen Lesekompetenz. *PhyDid B/*, 12pp, 2007.
- [Gr10] Grebe-Ellis, J.: Schatten wie Schriftzeichen lesen. *PhyDid A* 1/9, S. 34–44, 2010.
- [Gr11] Grebe-Ellis, J.: Wie sieht der Schatten einer Fliege aus? In: Alles, worin der Mensch sich ernstlich einlässt, ist ein Unendliches. *Physikdidaktische Miniaturen*. Logos, 2011, ISBN: 9783832527136.
- [Mö06] Möllmann Klaus-Peter und Vollmer, M.: Measurements and predictions of the illuminance during a solar eclipse. *European Journal of Physics* 27/6, 2006.
- [Wo06] Wozinski, R.: Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. In: *Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule*, S. 30, 2006, ISBN: 9783890881935.

Beispiel 1: Gleicher Raumwinkel von Leuchte und Schattengeber

Angenommen wir haben eine quadratische Leuchte (Seitenlänge 20 cm), die einen gleichfalls quadratischen Schattengeber (Seitenlänge 5 cm) beleuchtet. Beide Quadrate sollen vom Schirm aus betrachtet gleich groß erscheinen. Befindet sich die quadratische Leuchte zum Beispiel im Abstand $r = 2$ m vom Schirm entfernt, dann beträgt der Raumwinkel

$$\Omega = \frac{0,2 \cdot 0,2 \text{ m}^2}{2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}} = 0,01 \text{ sr.}$$

Der quadratische Schattengeber muss sich dann in einem Abstand von

$$r = \sqrt{\frac{A}{\Omega}} = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,05 \text{ m}^2}{0,01 \text{ sr}}} = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

vom Schirm entfernt befinden, um den gleichen Raumwinkel wie die Leuchte einzunehmen und genauso groß zu erscheinen. Passt das zu der Überlegung *Abstandsverdopplung führt zur Vervierfachung der Fläche*?

Beispiel 2: Mischungsgleichgewicht

Nehmen wir an, die lange Seite der L-förmigen Leuchte wäre wieder 20 cm lang, die kurze 10 cm. Die Fläche beträgt dann $A_L = (20 \cdot 10) \text{ cm}^2 + (10 \cdot 10) \text{ cm}^2 = 300 \text{ cm}^2 = 0,03 \text{ m}^2$. Die Leuchte soll wieder 2 m vom Schirm entfernt sein. Wo müssten wir den quadratischen Schattengeber (Seitenlänge 5 cm) positionieren, damit im Schattenbild Mischungsgleichgewicht herrscht. Für die gesuchte Position gilt

$$r_S = \sqrt{\frac{A_S}{A_L} r_L^2} = \sqrt{\frac{0,0025 \text{ m}^2}{0,03 \text{ m}^2} 4 \text{ m}^2} = 0,1826 \text{ m}$$

Der quadratische Schattengeber muss sich etwa 18,3 cm vom Schirm entfernt befinden, damit im Schattenbild Mischungsgleichgewicht herrscht.